第 5 节 圆中最值问题（★★★）

强化训练

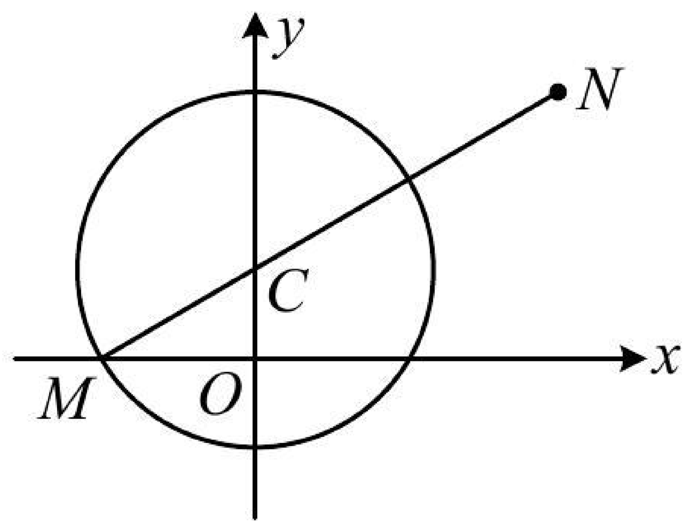
1.（2023•甘肃酒泉三模•★）点 M 在圆 $C:x^2+(y-1)^2=4$ 上，点 $N(2\sqrt{3},3)$，则 $|MN|$ 的最大值为（　　）

（A）3　（B）4　（C）5　（D）6

答案：D

解析：涉及圆上动点与定点的距离最值问题，应先判断定点在圆内还是圆外，

因为 $|NC|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(3-1)^2}=4>2$，所以点 N 在圆 C 外，如图，$|MN|_{\max}=|NC|+r=4+2=6$.



2.（2023•辽宁朝阳模拟•★）已知点 P 在圆 $x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y=0$ 上，则点 P 到 x 轴的距离的最大值为（　　）

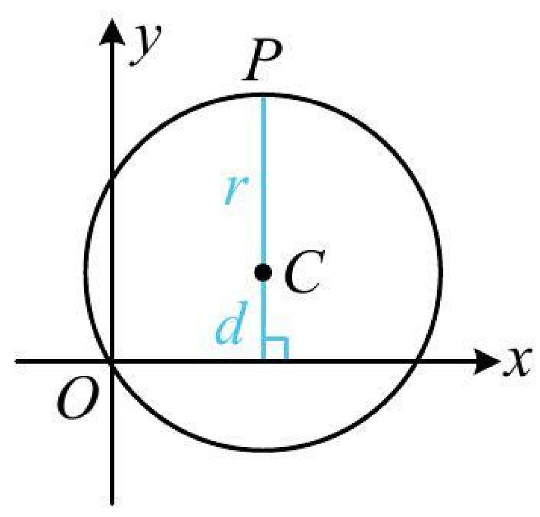
（A）2　（B）3　（C）$\sqrt{3}$　（D）$\sqrt{3}+2$

答案：B

解析：涉及圆上动点到定直线的距离最值问题，先看直线与圆的位置关系，

$x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y=0\Rightarrow(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$，所以圆心为 $C(\sqrt{3},1)$，半径 $r=2$，

故圆心到 x 轴的距离 $d=1<r$，直线与圆相交，如图，点 P 到 x 轴的距离的最大值为 $d+r=1+2=3$.



3.（★★）已知 O 为原点，P 为圆 $C:(x-1)^2+(y-b)^2=1(b>0)$ 上的动点，若 $|OP|$ 的最大值为 3，则 b 的值为（　　）

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）2

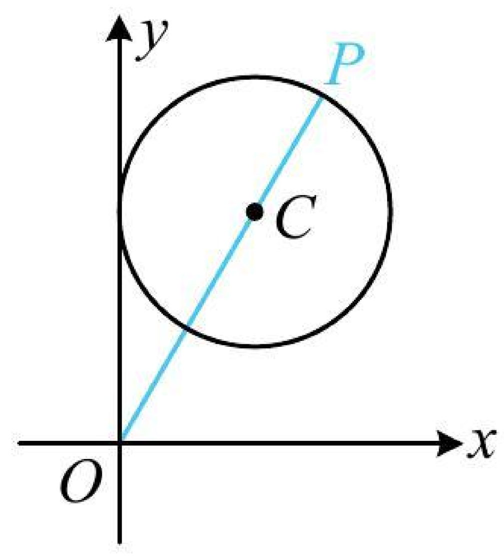
答案：C

解析：涉及圆上动点与定点的距离最值问题，应先判断定点在圆内还是圆外，

因为 $(0-1)^2+(0-b)^2=1+b^2>1$，所以点 O 在圆 C 外，

可按内容提要中的模型 1 处理，如图所示即为 $|OP|$ 最大的情形，

圆心为 $C(1,b)$，所以 $|OP|_{\max}=|OC|+1=\sqrt{1+b^2}+1$，由题意，$\sqrt{1+b^2}+1=3$，结合 $b>0$ 可得 $b=\sqrt{3}$.



4.（2022·陕西西安模拟·★★）已知半径为 2 的圆过点 $(5,12)$，则其圆心到原点的距离的最小值为（　　）

（A）10　　（B）11　　（C）12　　（D）13

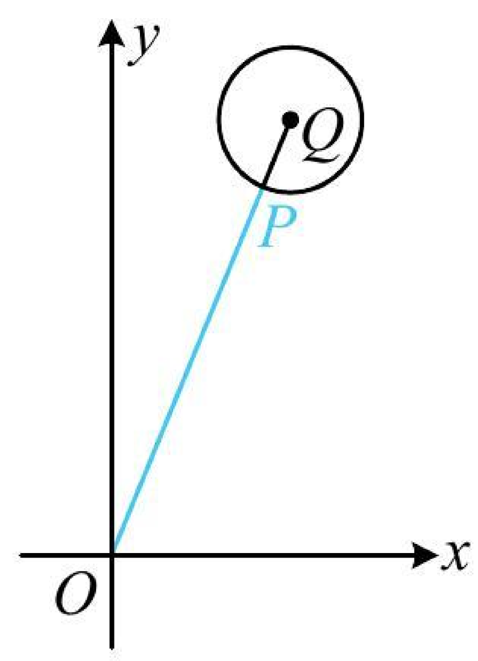
答案：B

解析：本题圆心是动点，先求出圆心的运动轨迹，设圆心为 $P(x,y)$，记 $Q(5,12)$，

由题意，$\sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2}=2$，所以 $(x-5)^2+(y-12)^2=4$，

故圆心 P 可在以 $Q(5,12)$ 为圆心，2 为半径的圆上运动，如图，原点在该圆外，属内容提要中的模型 1，

因为 $|OQ|=\sqrt{5^2+12^2}=13$，所以圆心 P 到原点距离的最小值为 $|OQ|-2=11$.



5.（2022·陕西西安模拟·★★）圆 $C:x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上的点 P 到直线 $l:x+y-14=0$ 的最大距离与最小距离之和为（　　）

（A）30　　（B）18　　（C）$10\sqrt{2}$　　（D）$5\sqrt{2}$

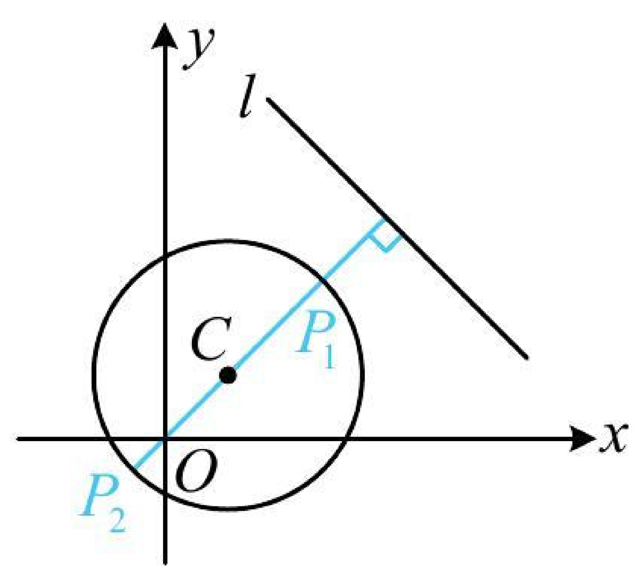
答案：C

解析：先判断直线 l 与圆 C 的位置关系，$x^2+y^2-4x-4y-10=0\Rightarrow(x-2)^2+(y-2)^2=18$

所以圆 C 的圆心为 $C(2,2)$，半径 $r=3\sqrt{2}$，故圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|2+2-14|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}>r$，

直线 l 与圆 C 相离，属内容提要中的模型 3，P 到 l 的距离最小、最大的情形如图中的 P_1，P_2，

圆 C 上的点到直线 l 的最大距离为 $d+r$，最小距离为 $d-r$，它们的和为 $2d=10\sqrt{2}$.



6.（2023·重庆模拟·★★）过点 $P(0,1)$ 的直线 l 与圆 $E:(x-1)^2+y^2=4$ 相交于 A，B 两点，则 $|AB|$ 的最小值是（　　）

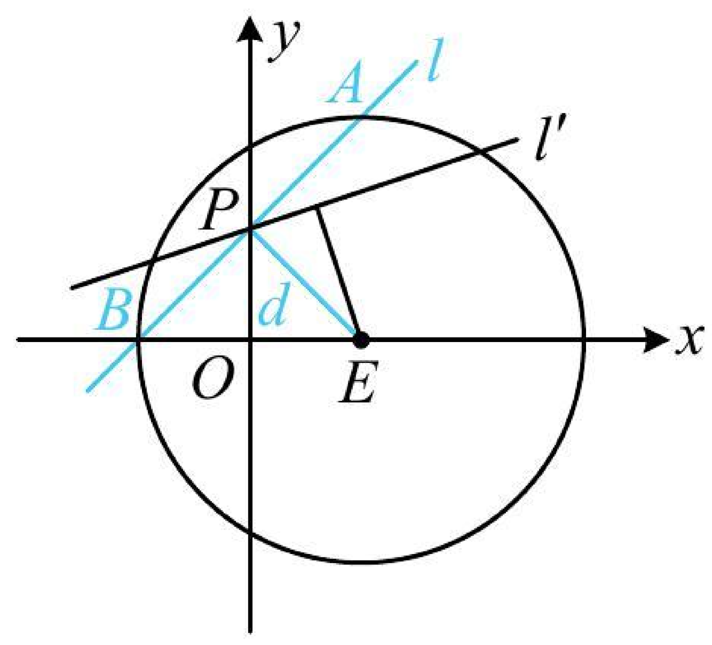
（A）2　（B）$2\sqrt{2}$　（C）$2\sqrt{3}$　（D）4

答案：B

解析：如图，$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-d^2}$，所以要使$|AB|$最小，应使 d 最大，

由图可知当直线$l\perp AB$时，d 最大，因为若不垂直，如图中的l'，圆心 E 到l'的距离显然小于到 l 的距离，

所以$d_{\max}=|PE|=\sqrt{2}$，故$|AB|_{\min}=2\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$.



7.（2022・青海大通三模・★★★）已知点 M，N 分别在圆$C:(x-3)^2+(y-1)^2=4$和直线$l:4x-3y+t=0$上运动，若$|MN|$的最小值为 7，则 t 的值为（　　）

（A）36　（B）37　（C）-45　（D）-54 或 36

答案：D

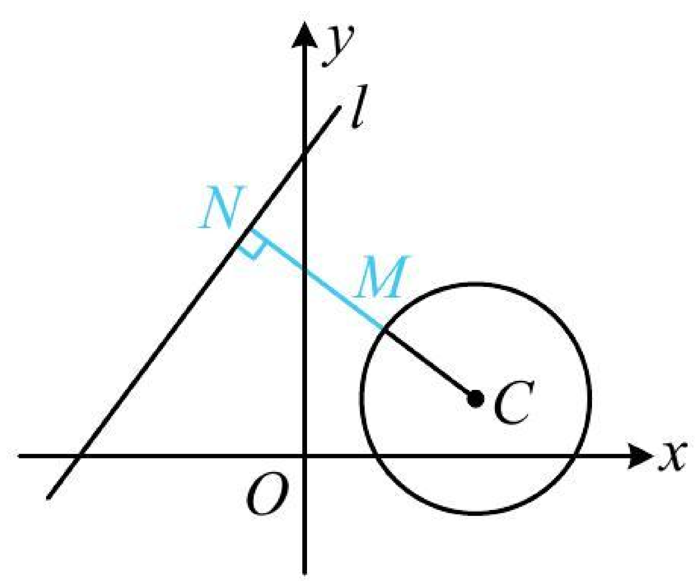
解析：为了作图，先判断直线与圆的位置关系，此处 l 含参，三种位置关系均有可能，故分别考虑，

若直线与圆有交点，则当 M，N 取同一交点时，$|MN|=0$，不合题意，所以直线与圆只能相离，

如图，当$|MN|$最小时，必有$MN\perp l$，故只需求点 M 到 l 距离的最小值，可按内容提要中的模型 3 处理，

圆心$C(3,1)$到直线 l 的距离$d=\dfrac{|4\times 3-3\times 1+t|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|9+t|}{5}$，所以$|MN|_{\min}=d-r=\dfrac{|9+t|}{5}-2$，

由题意，$\dfrac{|9+t|}{5}-2=7$，解得：$t=-54$ 或 36.



8.（2022・天津模拟・★★★）设曲线$C:x=\sqrt{1-(y-1)^2}$上的点 P 到直线$l:x-y-2=0$的距离的最大值为 a，最小值为 b，则$a-b$的值为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）$2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（C）2　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$

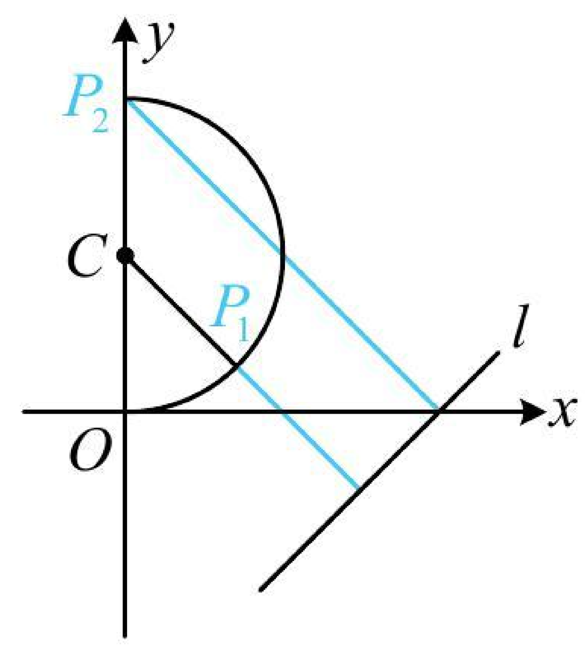
答案：D

解析：曲线 C 的方程有根号，先平方去根号，$x=\sqrt{1-(y-1)^2}\Rightarrow x^2=1-(y-1)^2\Rightarrow x^2+(y-1)^2=1(x\ge 0)$，

曲线 C 为如图所示的半圆，圆心为 $C(0,1)$，半径 $r=1$，点 C 到直线 l 的距离的 $d=\frac{|-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}>r$，

直线 l 与半圆 C 相离，P 到 l 的距离的最小值在图中 P_1 处取，但由于是半圆，所以最大值在 P_2 处取，

所以 $b=d-r=\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$，又 $P_2(0,2)$，所以 $a=\frac{|-2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$，故 $a-b=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$.



9.（★★★）已知 P 为圆 $O:x^2+y^2=2$ 上的动点，点 $A(m,m-3)(m\in\mathbf{R})$，则 $|PA|$ 的最小值为（　　）

（A）1　（B）2　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

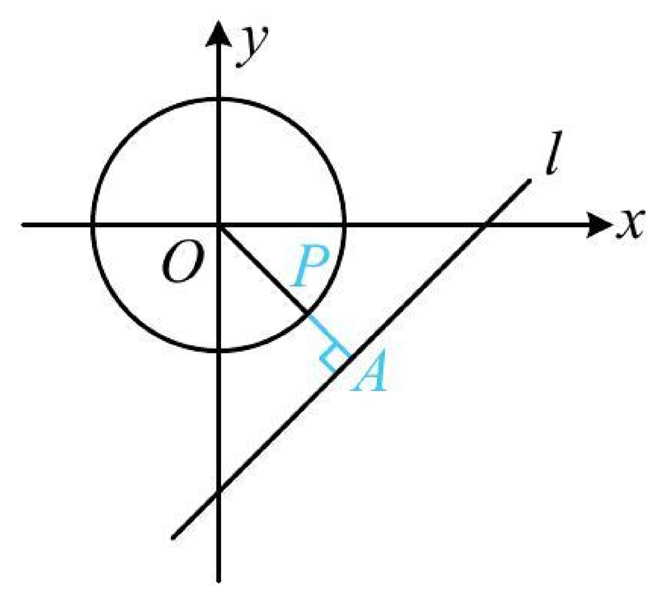
答案：C

解析：点 A 的坐标含参，是动点，先消去参数看看点 A 的运动轨迹，

设 $A(x,y)$，则 $\begin{cases}x=m\\y=m-3\end{cases}$，两式作差消去 m 整理得：$x-y-3=0$，所以 A 是直线 $l:x-y-3=0$ 上的动点，

对圆 O 上任意的点 P，A 在 l 上运动，总有当 $AP\perp l$ 时，$|PA|$ 最小，故只需求 P 到直线 l 距离的最小值，

如图，圆心 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $|PA|_{\min}=d-r=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



10.（2022 • 云南昆明模拟 • ★★★）在圆 $M:x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 内，过点 $O(0,0)$ 的最长弦和最短弦分别是 AC 和 BD，则四边形 $ABCD$ 的面积为（　　）

（A）24　（B）12　（C）10　（D）8

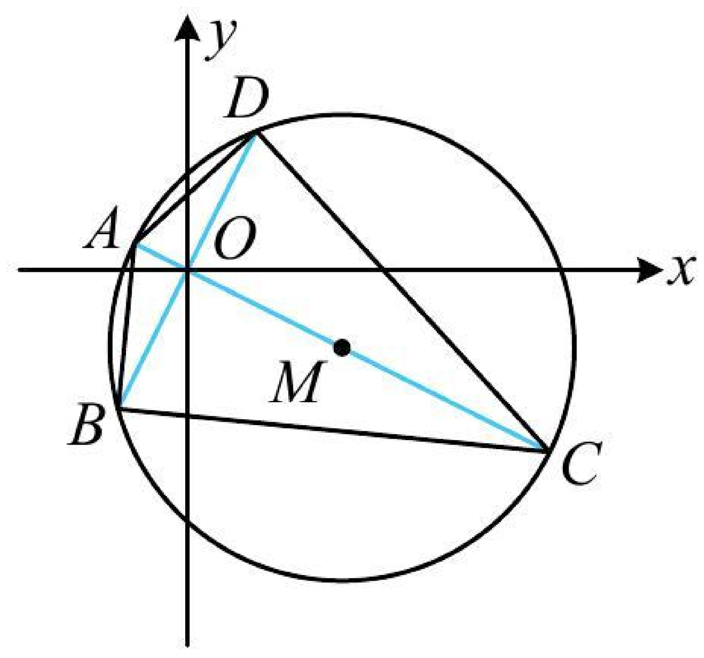
答案：B

解析：$x^2+y^2-4x+2y-4=0\Rightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=9$，所以圆心为 $M(2,-1)$，半径 $r=3$，

如图，原点 O 在圆内，属内容提要中的模型 5，最长弦 AC 是直径，最短弦 BD 是与 OM 垂直的弦，

所以 $|AC|=6$，又 $|OM|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，所以 $|BD|=2\sqrt{r^2-|OM|^2}=4$，

故四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{1}{2}\times6\times4=12$.



11．（2021·北京卷·★★★）已知直线 $y=kx+m$（m 为常数）与圆 $x^2+y^2=4$ 交于 M，N，当 k 变化时，若 $|MN|$ 的最小值为 2，则 $m=$（　　）

（A）±1　　（B）$\pm\sqrt{2}$　　（C）$\pm\sqrt{3}$　　（D）±2

答案：C

解法 1：注意到 m 为常数，故所给直线是过定点 $P(0,m)$ 的直线，先分析点 P 与圆的位置关系，

如图，点 P 必在圆内，否则 M，N 可以重合，$|MN|$ 的最小值不是 2，

此时问题就变成了过圆内定点的最短弦问题（内容提要的模型 5），可直接求 $|MN|$ 的最小值，

当 $MN\perp OP$ 时，$|MN|$ 最小，所以 $|MN|_{\min}=2\sqrt{r^2-|OP|^2}=2\sqrt{4-m^2}$，由题意，$|MN|_{\min}=2$，

所以 $2\sqrt{4-m^2}=2$，解得：$m=\pm\sqrt{3}$.

解法 2：涉及圆的弦长，可用公式 $L=2\sqrt{r^2-d^2}$ 计算，

设圆心 O 到直线 l 的距离为 d，则 $|MN|=2\sqrt{4-d^2}$，

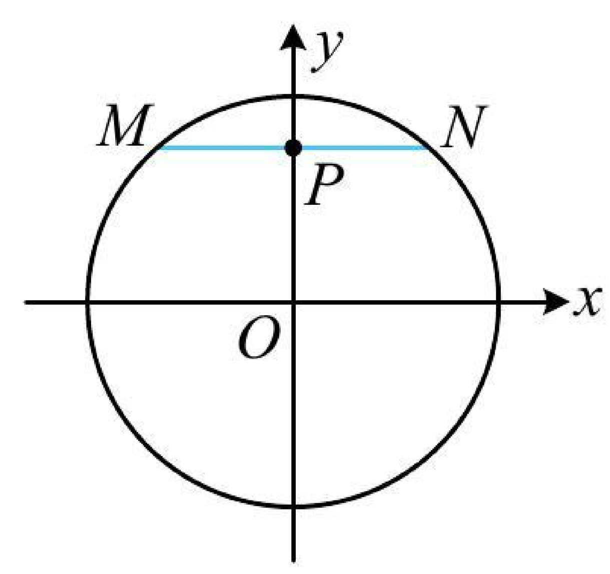
我们发现 d 最大时，$|MN|$ 最小，而 d 可由点到直线的距离公式计算，故先计算，再分析其最大值，

由题意，$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$，

注意到题干说 m 为常数，所以上式的变量是 k，

当 $k=0$ 时，d 取最大值 $|m|$，所以 $|MN|_{\min}=2\sqrt{4-|m|^2}$，

由题意，$|MN|_{\min}=2$，所以 $2\sqrt{4-|m|^2}=2$，故 $m=\pm\sqrt{3}$.



12．（2023·全国模拟·★★★）在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-2,0)$，$B(0,1)$，点 P 在圆 $O:x^2+y^2=2$ 上运动，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的取值范围是_____.

答案：$[2-\sqrt{10},2+\sqrt{10}]$

解析：点 P 在圆 O 上运动，故可方便地用三角形式表示 P 的坐标，进而转化为三角函数求范围，

由题意，可设$P(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$，则$\overrightarrow{AP}=(\sqrt{2}\cos\theta+2,\sqrt{2}\sin\theta)$，$\overrightarrow{BP}=(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta-1)$，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\sqrt{2}\cos\theta+2)\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta(\sqrt{2}\sin\theta-1)$

$=2\cos^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta+2\sin^2\theta-\sqrt{2}\sin\theta$

$=2+2\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta=2+\sqrt{10}(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\sin\theta+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta)$

$=2+\sqrt{10}\sin(\theta+\varphi)$，其中$\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

因为$-1\le\sin(\theta+\varphi)\le 1$，所以$2-\sqrt{10}\le\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}\le 2+\sqrt{10}$.